Leçon 158 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

Développements :

Ellipsoïde de John-Loewner, L'exponentielle induit un homéomorphisme entre $S_n(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R})^{++}$.

Bibliographie :

Rombaldi, Gourdon, Grifone, H2G2, Bernis.

Rapport du jury 2016 :

Le théorème spectral est indispensable dans cette leçon sans toutefois être un développement consistant. La notion de signature doit être présentée ainsi que son unicité dans la classe de congruence d'une matrice symétrique réelle. L'action du groupe linéaire et du groupe orthogonal sur l'espace des matrices symétriques peut donner un cadre naturel à cette leçon. Le lien avec les formes quadratiques et les formes hermitiennes est incontournable. La partie réelle et la partie imaginaire d'un produit hermitien définissent des structures sur l'espace vectoriel réel sous-jacent. L'orthogonalisation simultanée est un résultat important de cette leçon. Il faut en connaître les applications géométriques aux quadriques.

Rapport du jury 2017 :

Le théorème spectral est indispensable dans cette leçon sans toutefois constituer un développement consistant. La notion de signature doit être présentée ainsi que son unicité dans la classe de congruence d'une matrice symétrique réelle. L'action du groupe linéaire et du groupe orthogonal sur l'espace des matrices symétriques peut donner un cadre naturel à cette leçon. Le lien avec les formes quadratiques et les formes hermitiennes est incontournable. La partie réelle et la partie imaginaire d'un produit hermitien définissent des structures sur l'espace vectoriel réel sous-jacent. L'orthogonalisation simultanée est un résultat important de cette leçon. Il faut en connaître les applications géométriques aux quadriques. Les candidats familiers avec ces notions pourront illustrer la leçon en évoquant le cas des matrices de covariance de vecteurs aléatoires et discuter les conditions en assurant le caractère inversible. Une discussion de la décomposition de Cholesky, qui a de nombreuses applications pour le calcul scientifique (en lien avec la résolution de systèmes linéaires ou de problèmes de moindres carrés) ou en probabilités (construction d'un vecteur gaussien de matrice de covariance donnée à partir d'un vecteur gaussien de matrice de covariance identité), peut mériter sa place dans cette leçon.

Remarque 1. *Cadre : E est un K-ev de dimension finie avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

1 Généralités

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 2 (Gourdon ou Romb ou Grifone)**.** *$A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique si $A^t = A$. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques.*

Définition 3. *$A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite antisymétrique si $A^t = -A$. On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.*

Définition 4. *$A \in M_n(\mathbb{C})$ est dite hermitienne si $\overline{A}^t = A$. On note $H_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices hermitiennes.*

Remarque 5. *$S_n(\mathbb{R}) \subset H_n(\mathbb{C})$, $iA_n(\mathbb{R}) \subset H_n(\mathbb{C})$.*
$H_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{R}$-ev mais pas un $\mathbb{C}$-ev : $I_n \in H_n(\mathbb{C})$ mais $iI_n \notin H_n(\mathbb{C})$.

Exemple 6 (Grifone p279)**.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *est antisymétrique.*

Exemple 7. *Hessienne d'une fonction C^2.*

Exemple 8. *La matrice du laplacien discret est symétrique.*

Proposition 9 (Gourdon p229)**.** *Dimensions de S_n, de A_n, de $H_n(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{R}$.*

Proposition 10 (Gourdon p228)**.** *Si caractéristique différente de 2, somme directe de S_n et A_n. $H_n(\mathbb{C}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus iA_n(\mathbb{R})$ vus comme $\mathbb{R}$-ev.*

Remarque 11 (Grifone p280)**.** *Les élements diagonaux d'une matrice hermitienne sont des réels, ceux d'une matrice antisymétrique sont nuls.*

Proposition 12. *Pour $A \in S_n(\mathbb{R})$, $H_n(\mathbb{C})$, $Sp(A) \subset \mathbb{R}$.*
Pour $A \in A_n(\mathbb{R})$, $Sp(A) \subset i\mathbb{R}$.

Définition 13 (Gourdon p245)**.** *[Romb analyse matricielle p99] Matrice hermitienne/symétrique positive et définie positive.*

Définition 14. *On définit $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des $S \in S_n(\mathbb{R})$ tel que $X^tSX \leq 0 \forall X \in \mathbb{R}^n$.*
On définit $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ tel que $X^tSX = 0$ implique $X = 0$.

Définition 15. *On définit $H_n^+(\mathbb{C})$ l'ensemble des $S \in H_n(\mathbb{C})$ tel que $X^tSX \geq 0 \forall X \in C^n$.*
On définit $H_n^{++}(\mathbb{C})$ l'ensemble des $S \in H_n^+(\mathbb{C})$ tel que $X^tSX = 0$ implique $X = 0$.

Remarque 16. *Si A est dans $S_n^+(\mathbb{R})$,$H_n^+(\mathbb{C})$, alors $Sp(A) \subset R_+$.*
Si A est dans $S_n^{++}(\mathbb{R}), H_n^{++}(\mathbb{C})$, alors $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Exemple 17. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

1.2 Lien avec les formes bilinéaires symétriques ou hermitiennes

Définition 18 (Gourdon p227,229)**.** *Une forme bilinéaire symétrique sur un K-ev E est une application $b : E \times E \to K$ telle que $\forall x, y \in E, b(x, .)$ et $b(., y)$ sont des formes linéaires, et telle que $b(x, y) = b(y, x)$.*

Définition 19 (Gourdon p227-229)**.** *Une forme sesquilinéaire hermitienne sur un $\mathbb{C}$-ev E est une application $b : E \times E \to K$telle que $\forall x, y \in E, \underline{b(x, .)}$ est une forme linéaire, $b(., y)$ est une forme linéaire et telle que $b(x, y) = \overline{b(y, x)}$.*

Exemple 20 (Gourdon p226)**.** *Si E est un $\mathbb{C}$-ev de fonctions de $[0, 1] \to \mathbb{C}$, intégrables, $b(f, g) := \int_0^1 f(t)g(t)dt$ est une forme sesquilinéaire hermitienne.*

Exemple 21. *Pour $X, Y \in \mathbb{R}^n, b(X, Y) = X^tY$ est une forme bilinéaire symétrique.*
Pour $X, Y \in \mathbb{C}^n$, $b(X, Y) = X^tY$ est une forme sesquilinéaire hermitienne.

Remarque 22. *A une matrice hermitienne $H \in H_n(\mathbb{C})$ on peut associer une forme hermitienne définie par $(X, Y) \mapsto X^*HY$.*

Définition 23 (Gourdon p228)**.** *[Rolb p464] Pour $B = (e_1, .., e_n)$ une base de E, et b bilinéaire/sesquilinéaire, on définit $Mat(b, B) \in M_n(K)$ par $Mat(b, B)_{i,j} := b(e_i, e_j)$.*

Proposition 24 (Romb p465)**.** *Une forme bilinéaire est symétrique ou hermitienne si et seulement si sa matrice dans une base quelconque est symétrique ou hermitienne.*

Proposition 25 (Gourdon p228)**.** *[Romb p465] Isomorphisme entre ϕ et sa matrice dans une base. L'ensemble des formes bilinéaires (sesquilinéaires) symétriques (hermitiennes) est isomorphe à S_n (H_n) via le choix d'une base de E.*

Proposition 26 (Romb p465)**.** *[Gourdon p228] Formule de changement de bases.*

Définition 27 (Gourdon p228)**.** *On dit que les matrices sont congrues.*

Remarque 28. *Deux matrices sont congrues si et seulement si elles codent la même forme quadratique dans deux bases différentes.*

Remarque 29. *Classifier les formes hermitiennes/quadratiques, c'est comme classifier les matrices hermitiennes/symétriques à congruence près.*

Définition 30 (Gourdon p229)**.** *Une forme quadratique réelle q sur E est une application de la forme $q(x) = b(x, x)$ pour b une forme bilinéaire symétrique.*
b est appelée forme polaire de$q$, et elle est unique.
Une forme hermitienne q sur E est une application de la forme $q(x) = b(x, x)$ pour b une forme sesquilinéaire hermitienne. b est appelée forme polaire de q, et elle est unique.

Définition 31. *Parler des formes quadratiques positives et définies positives ?*

Proposition 32 (Gourdon p235)**.** *Si q est une forme quadratique définie positive, $\sqrt{q}$ est une norme.*

1.3 Liens avec les endomorphismes autoadjoints

Définition 33 (Romb p697)**.** *Espaces euclidiens et hermitiens. A rappeler ?*

Proposition 34 (Romb p702)**.** *Adjoint d'un endomorphisme.*

Proposition 35 (Romb)**.** *u^* est une involution.*

Proposition 36 (Romb p703)**.** *Pour B une base de E, on a $Mat(f^*, B) = Mat(f, B)^t$ si $K = \mathbb{R}$ (resp $\overline{Mat(f, B)}^t$ si $K = \mathbb{C}$).*
Ainsi, les matrices des endomorphismes autoadjoints sont exactement les matrices symétriques (resp hermitiennes), et on a un isomorphisme entre ces deux espaces

Définition 37 (Romb p717)**.** *Endomorphisme autoadjoint.*

Proposition 38 (Romb p717)**.** *Un endomorphisme est autoadjoint si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée est symétrique.*

Exemple 39 (Escofier p353)**.** *L'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé ç la matrice du laplacien est symétrique.*

1.4 Congruences. Matrices orthogonales et unitaires.

Définition 40 (H2G2 p150,157)**.** *Action par congruence : action de $GL_n(\mathbb{R})$ sur $S_n(\mathbb{R})$ ou $GL_n(\mathbb{C})$ sur $H_n(\mathbb{C})$.*

Définition 41 (H2G2 p150)**.** *Deux matrices sont congruentes si et seulement si elles appartiennent à la même orbite pour l'action de congruence.*

Définition 42 (H2G2 p157)**.** *Groupe orthogonal de q est la stabilisateur de sa matrice associée sous l'action de congruence. Notation O_n ou U_n si $A = I_n$.*

Proposition 43. *Dans un espace euclidien, $A \in O_n$ si et seulement si A est la matrice d'une isométrie dans une base orthonormée.*

2 Réduction des matrices symétriques et hermitiennes

2.1 Méthode de Gauss

Théoreme 44 (Romb p471). *Réduction de Gauss et algorithme.*

Exemple 45 (Romb exo). *Un exemple d'application.*

Corollaire 46 (Romb p475 ou p478 directement). *Matrice de q dans une base convenable.*

Définition 47 (Romb p475). *Base orthogonale pour la forme quadratique.*

Corollaire 48 (Romb p476 ou p478). *Pour une matrice symétrique. (Insister sur le gait que $P \in GL_n(\mathbb{R})$.*

Définition 49 (Romb p479). *Signature.*

Théoreme 50 (Romb p480). *Théorème d'inertie de Sylvester. Mettre aussi le thm dans $\mathbb{C}$.*

Corollaire 51 (H2G2 p151). *Invariants pour les orbites.*

Application 52 (H2G2). *Formes de Hankel.*

Proposition 53 (Romb p479). *Une forme quadratique est définie positive si et seulement si elle est de signature $(n, 0)$. Donc S_n^{++} est la classe de congruence de I_n dans $GL_n(\mathbb{R})$ (H2G2 p258).*

Proposition 54 (Romb p723). *Une matrice réelle symétrique est définie positive si et seulement si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs.*

Application 55 (Romb p723). *S_n^{++} est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.*

2.2 Théorème spectral et applications

Remarque 56. *Autre point de vue.*
On a rajouté l'aspect "base orthonormale" pour perdre le fait de n'avoir que des 1 et des -1 (réduction euclidienne vs. réduction affine).

Lemme 57 (Romb p719). *Les valeurs propres sont réelles. Si matrice positive, les valeurs propres sont positives. Si définie positive, les valeurs propres sont strictement positives.*

Proposition 58. *Toute matrice symétrique admet au moins une valeur propre réelle.*

Théoreme 59 (Romb p482). *[Gourdon p244] Théorème spectral.*

Exemple 60 (Romb p739).

Remarque 61. *On retrouve le théorème de réduction de Gauss.*

Application 62 (Romb p723). *$M \in S_n^+$ si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.*

Application 63 (Gourdon p245). *Théorème de réduction simultanée.*

Proposition 64 (Romb p721). *$A \in S_n^+$ si et seulement si $A = B^t B$.*

Proposition 65 (H2G2). $\exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ *est un homéomorphisme.*

Proposition 66 (H2G2). *$exp : H_n(C) \to H_n^{++}(\mathbb{C})$ est aussi un homéomorphisme.*

Proposition 67. *Racine carrée d'une matrice.*

Théoreme 68 (H2G2). *Décomposition polaire dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$.*

Proposition 69 (Romb p728). *Si $A \in S_n(\mathbb{R})$, $||A|| = \rho(A)$.*

Corollaire 70 (Romb p728). *Pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, $||A|| = \sqrt{||A^t A||} = \sqrt{\rho(A^t A)}$.*

Proposition 71 (H2G2). *Maximalité de $O(n)$*

Proposition 72 (H2G2). *On a l'homéomorphisme $O(p, q) \simeq O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$.*

3 Applications

3.1 Méthodes itératives pour les systèmes linéaires

Remarque 73. *Soient $A \in GL_n(\mathbb{C})$, $b \in \mathbb{C}^n$. On cherche à résoudre le problème $Ax - b = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{C}^n$.*

Définition 74. *Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ que l'on écrit $A = M - N$ avec M inversible. On dit que la méthode itérative associée à cette décomposition est convergente si, pour tout $b \in \mathbb{C}^n$, pour tout $x_0 \in \mathbb{C}^n$, la suite définie par $x_{k+1} = M^{-1} N x_k + M^{-1} b$ converge.*

Proposition 75. *Si la méthode converge, alors sa limite x est l'unique solution du système linéaire $Ax = b$.*

Proposition 76. *Méthode de relaxation.*

Proposition 77. *Inégalité de Kantorovich.*

Proposition 78. *Algorithme du gradient à pas optimal.*

3.2 Recherche d'extrema

Proposition 79 (Gourdon). *Conditions du second ordre.*
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable. Un point $x \in \mathbb{R}^n$ est un extremum local si et seulement si $D_x(f) = 0$ et $D_x(f)$ est une matrice symétrique définie positive (minimum local) ou définie négative (maximum local).

Exemple 80.

Proposition 81. *Lemme de Morse.*

3.3 Aspects géométriques des valeurs propres

Proposition 82. *Rayleigh.*

Théoreme 83. *Courant-Fischer.*

Proposition 84 (FGN)**.** *Théorème d'entrelacement de Sturm.*